Problemes plantejats en el decurs de les sessions

20. Demostreu que, si a, b i $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = m$ són enters positius, llavors m és un quadrat.

Solució

Si $a = 1, b = 1$, aleshores $m = 1$ i per tant m és un quadrat.

Si $m > 1$, posant $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = m$ en la forma $a^2+b^2-m\,a\,b-m=0$, s'observa que l'enunciat diu que $P(a,b)$ és un punt de coordenades enteres i positives de la cònica $x^2+y^2-m\,x\,y=0$ on m és un enter positiu.

Si $m = 2$, aleshores $x^2+y^2-2\,x\,y-2=0$ o sigui que $(x-y)^2-2=0$; és a dir, la cònica descompon en el producte de les dues rectes paral·leles $x-y-\sqrt{2}=0$ i $x-y+\sqrt{2}=0$ i per tant no té cap punt de coordenades enteres.

Si $m > 2$, la cònica és una hipèrbola simètrica respecte de la recta $x = y$ i que no talla a aquesta recta. Sigui $A_1(x_1, y_1)$ un punt d'aquesta hipèrbola amb x_1, y_1 enters positius i podem suposar sense resctricció que $x_1 > y_1$. Observem que, si una de les coordenades a d'un punt de la hipèrbola és un enter positiu i l'altra coordenada b també és entera, ha de ser necessàriament positiva o nul·la perquè sinó seria $a^2+b^2-m\,a\,b > m$ i això és absurd.

Si substituïm y_1 a l'equació de la cònica, tindrem l'equació de segon grau en x

$$x^2 - m\,x\,y_1 + y_1^2 - m = 0$$

una arrel de la qual és x_1 i l'altre és $x_2 = \dfrac{y_1 - m}{x_1} = m\,y_1 - x_1$. La primera expressió d'x_2 ens diu que és més petit que y_1 i la segona que és un enter i per tant positiu o nul perquè satisfà l'equació

$$y_1^2 + x_2^2 - m\,y_1\,x_2 - m = 0,$$

és a dir és un punt de la hipèrbola.

Si $x_2 = 0$, resulta que $m = y^2$ i hem acabat la demostració. Si $x_2 > 0$, repetim el procés amb el punt $A_2(y_1, x_2)$ i obtindrem un punt $A_3(x_2, y_2)$ amb $y_2 > x_2$ enter positiu o nul tal que $y_2 = \dfrac{x_2^2 - m}{y_1}$ i $x_1 > y_1 > x_2 > y_2$. Com que aquesta successió és una successió de nombres positius decreixents, el procés no podrà continuar indefinidament arribant necessàriament a una coordenada 0. Si y_n és el darrer terme no nul d'aquesta successió, $m = y_n^2$, com volíem demostrar.

21. Donat qualsevol α real, $\alpha > 1$, construïu una successió $\{a_i\}$ acotada $[\forall i \in \mathbb{N} (|a_i| < C)]$, tal que els seus termes verifiquin:

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \left(|a_i - a_j| \cdot |i - j|^\alpha \geq 1 \right).$$

L'anterior enunciat correspon a un dels 8 problemes que van ser formulats a les proves finals de l'Olimpíada Internacional de Matemàtiques de fa dos anys i que fou publicat pel *Butlletí de la Secció de Matemàtiques*, 7 (1 992) de l'I.E.C.

L'existència de l'exponent α suggereix, sibilinament, que aquest requisit ha de ser imprescindible per a la resolució del problema —més endavant veurem que no és pas així—, i a l'hora aquest mateix exponent fa nosa en el moment d'assajar una via de solució.

Anem a exposar a continuació la solució "oficial" al problema que fou presentada al fòrum per l'estudiant Ignasi Mundet, el qual l'havia tret de la revista *Normat*, 1992. A continuació exposarem dues solucions més, endurint però les hipòtesis de partida, prenent com a valor d'α l'1.

Primera solució [Solució oficial]

Es basa amb una utilització adequada de la convergència de la sèrie armònica quan l'exponent dels naturals ès més gran que 1 $\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} < \infty, \text{quan } \alpha > 1 \right]$. L'enfocament de la solució fa imprescindible aquest punt de sortida.

La construcció de la successió rau en un procediment recorrent:

$$x_0 = 0, \qquad x_{i+1} = \text{ínfim} \{ z > 0 : (\forall k \leq i) (|z - x_k| \cdot |i + 1 - k|^\alpha \geq 1) \}.$$

Els termes de la successió satisfan la condició de l'enunciat per la pròpia construcció. Veiem ara que tots els termes de la successió estan fitats pel valor $2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} = D$. En efecte, sigui a_k un terme qualsevol de la successió. Com que s'ha de verificar

$$(\forall i < k) \left(|a_k - a_i| \geq \frac{1}{|k - i|^\alpha} \right),$$

si prenem les boles de centre x_i i radi $\frac{1}{(k-i)^\alpha}$, la suma de les longituds de tots aquests segments és inferior a D, i per tant la ubicació d'a_k com a ínfim del complementari d'aquestes boles obertes serà sempre $a_k < D$.

És evident que el procediment anterior obliga al fet que el valor d'α sigui superior a 1, per tal de poder garantir l'afitament dels termes de la successió. Així, per exemple, si $\alpha = 2$, llavors es pot assegurar que els termes de la successió estan tots ells dins de l'interval $\left[0, \frac{\pi^2}{3}\right)$, però a mesura que α s'apropa a 1, la fita de la successió anirà creixent a valors cada cop més grans.

Segona solució

Anem a veure a continuació una alternativa de solució que eviti la hipòtesi d'$\alpha > 1$ i que els termes de la successió compleixin $|a_i - a_j| \cdot |i - j| \geq 1$.

Basant-nos en l'estructura decimal dels nombres reals, encabirem tots el termes de la successió a l'interval $[0, 10)$ de la manera següent:

Els primers 10 termes de la successió seran $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Els següents 10 termes seran $0.1, 1.1, \ldots, 9.1$. Ara vindrien els mateixos nombres però canviant l'1 de la xifra de les dècimes per un 2, i així fins arribar a $0.9, 1.9, \ldots, 9.9$. A continuació el mateix però fent augmentar d'una a una les xifres de les centèsimes: $0.01, \ldots, 9.01, \ldots$

De fet, i deixant de banda l'esquema geomètric en el qual s'inspira la construcció dels nombres de la successió, és molt fàcil d'esbrinar quin és el decimal que es troba en un lloc qualsevol de la successió. N'hi ha prou amb agafar el nombre amb base decimal que dóna el lloc, capgirar-lo i posar la coma un lloc a la dreta de la primera xifra (que eventualment pot ser zero). Per exemple, $a_{1\,357} = 7.531; a_{12\,500} = .0521$. Formalment, si l'expressió decimal del lloc N és igual a $N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 10^i$, aleshores $a_N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 10^{-i}$.

La successió així construïda està trivialment fitada per 10 i, a més, no és gens difícil de veure que verifica la desigualtat de l'enunciat. Si prenem dos termes ben propers de la successió, per exemple, 3.145 i 3.146, la seva diferència és d'una mil·lèsima, però la diferència dels llocs a on es troben és: $6\,413 - 5\,413 = 1\,000$, amb la qual cosa el producte de les dues diferències és 1.

Nota. Aquest procediment el podem aplicar a una base inferior a 10, per exemple 3, i així reduir el confinament de la successió al segment $[0, 3)$. Tanmateix, no podem pas fer el mateix per a la base binària, doncs aleshores el segment $[0, 2)$ no és prou llarg com per poder separar adequadament els termes de la successió, quan realitzem el retorn cap endarrera. Els intents per modificar lleugerament la successió que es construiria en la base binària, tot i fent una mica més gran el confinament, han estat infructuosos.

Tercera solució

Una tercera alternativa basada en un mètode diferent per construir la successió condueix a una fita lleugerament inferior a 3, però no pas gaire més petita. Concretament la fita passaria a ser $\sqrt{2} + \frac{3}{2}$.

La següent solució té la seva justificació en el conegut *teorema de Liouville* sobre l'aproximació d'un nombre algèbric per racionals, que l'any 1 848 li permeté de construir el primer nombre amb base decimal que era amb seguretat transcendent. L'enunciat d'aquest teorema diu:

Donat un nombre algèbric α de grau n, existeix una constant M_α, que només depèn d'α, tal que per a tot racional $\frac{p}{q}$ satisfa la desigualtat

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{M_\alpha}{q^n}.$$

Si considerem el nombre algèbric $\sqrt{2}$, tindrem que es compleixen les següents desigualtats per a una constant M: $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{M}{q^2}$ o multiplicant-ho tot per q^2: $q\,|q\sqrt{2} - p| > M$ o $\frac{1}{M} q\,|q\sqrt{2} - p| > 1$. Si ara considerem la successió

$$A_n = \frac{1}{M}\left(n\sqrt{2} - \left[n\sqrt{2}\right]\right),$$

on $[x]$ vol dir *part entera d'x*, llavors la diferència entre dos termes d'aquesta successió donarà una expressió del mateix tipus, i es satisfaran les condicions de l'enunciat del problema: tots els termes de la successió es troben dins del segment $\left[0, \frac{1}{M}\right)$. Anem ara a detreminar el valor d'$\frac{1}{M}$.

Considerem la successió $a_n = \mathrm{Frac}\left(n\sqrt{2}\right)$ i la successió complementària $b_n = 1 - a_n$. Llavors la diferència entre dos termes qualssevol de la successió a_i dóna lloc a un valor que pertany a una de les dues successions. En efecte, sigui

$$a_i = \mathrm{Frac}\left(i\sqrt{2}\right) = i\sqrt{2} - p_i; \qquad a_j = \mathrm{Frac}\left(j\sqrt{2}\right) = j\sqrt{2} - p_j.$$

Llavors, si $i > j$,

$$|a_i - a_j| = \left|(i-j)\sqrt{2} - (p_i - p_j)\right| < 1,$$

que en el cas que correspongui a $a_i > a_j$ correspondrà a un valor de la successió a_i, i en el cas contrari correspondrà a un valor de la successió b_i.

Anem ara a demostrar que tots els termes d'ambdues successions satisfan les següents desigualtats:

$$n \cdot a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad n \cdot b_n \geq \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{3}{2}}.$$

Sabem que $a_n = n\sqrt{2} - p_n$, i com que $\left(n\sqrt{2} - p_n\right)\left(n\sqrt{2} + p_n\right) = 2n^2 - p_n^2 \geq 1$, tenim: $n\sqrt{2} - p_n \geq \frac{1}{n\sqrt{2} + p_n}$ i multiplicant per n: $n\left(n\sqrt{2} - p_n\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{p_n}{n}}$, però $\frac{p_n}{n}$ són les diferents aproximacions inferiors d'$\sqrt{2}$. $\left[n\sqrt{2} - p_n > 0 \text{ implica } \sqrt{2} > \frac{p_n}{n}\right]$. I per tant una fita superior del denominador és $2\sqrt{2}$ i s'obté la desigualtat $n\,a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ara demostrem l'altra desigualtat:

Tenim que b_n és de la forma $q_n - n\sqrt{2}$, on $q_n = p_n + 1$. De fet, q_n és el primer enter superior a $n\sqrt{2}$, mentre que p_n n'és el primer enter inferior. Com abans tenim que

$$\left(q_n - n\sqrt{2}\right)\left(q_n + n\sqrt{2}\right) = q_n^2 - 2n^2 \geq 1,$$

d'on $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2} + \frac{q_n}{n}}$. Però ara $q_n - 2\sqrt{2} > 0$ implica $\sqrt{2} < \frac{q_n}{n}$. És a dir, les diefernts aproximacions a $\sqrt{2}$ que representen les fraccions $\frac{q_n}{n}$ són totes elles superiors a rel quadrada de 2. La taula de les primeres aproximacions seria $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots$ Totes aquestes aproximacions racionals tendeixen a rel quadrada de dos, quan n creix indefinidament.

Per a totes les fraccions $\frac{q_n}{n}$ tals que el seus numerador i denominador no verifiquen l'*equació de Pell* $q_n^2 - 2n^2 = 1$ no hi ha cap mena de problema a l'hora de demostrar la desigualtat, ja que podem escriure $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{2}{\sqrt{2} + \frac{q_n}{n}}$ i, com que 2 és una fita superior de totes aquestes fraccions, tenim que $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{2}{\sqrt{2}+2} > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}$.

Els valors més petits de $q_n + \sqrt{2}$ s'obtindran dels valors $\langle q_n, n\rangle$ que satisfan l'equació de Pell. Però aquestes solucions $\left[\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \cdots\right]$ formen una successió decreixent que tendeix a $\sqrt{2}$ i, per tant, $\frac{3}{2}$ és una fita superior de totes elles i d'aquesta manera podem concloure que sempre es complirà

$$n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}.$$

D'aquesta forma es podrà constatar simultàniament per ambdues successions a_n, b_n la següent desigualtat:

$$n\,a_n\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right) > 1, n\,b_n\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right) \geq 1,$$

la qual cosa garanteix que la successió formada de la següent manera:

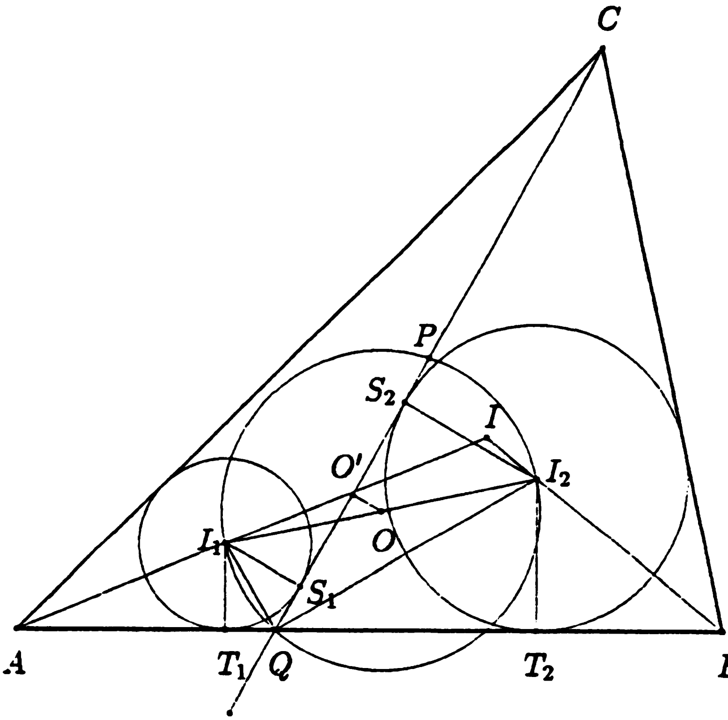
$$A_n = \left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot \mathrm{Frac}\left(n\sqrt{2}\right),$$

satisfà l'enunciat del problema, i tots els seus termes es troben dins en el segment $\left[0, \sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)$.

Nota. La solució presentada mitjançant aquest mètode és fàcilment generalitzable a d'altres irracionals quadràtics, però el valor de la fita augmentaria. Resta per veure si és possible trobar una altra successió de confinament inferior i si és possible de demostrar l'existència d'una fita mínima per tal que el problema tingui solució. Els intents que hem fet per resoldre aquesta darrera qüestió han sigut infructuosos. Tanmateix el problema sembla prou interessant...

22. Donat un triangle ABC, un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C, s'ha de demostrar que la circumferència que té per diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ABC i BQC, talla el segment QC en el punt Q i un altre P el qual dista $p-c$ de C, amb independència de la posició de Q.

Solució



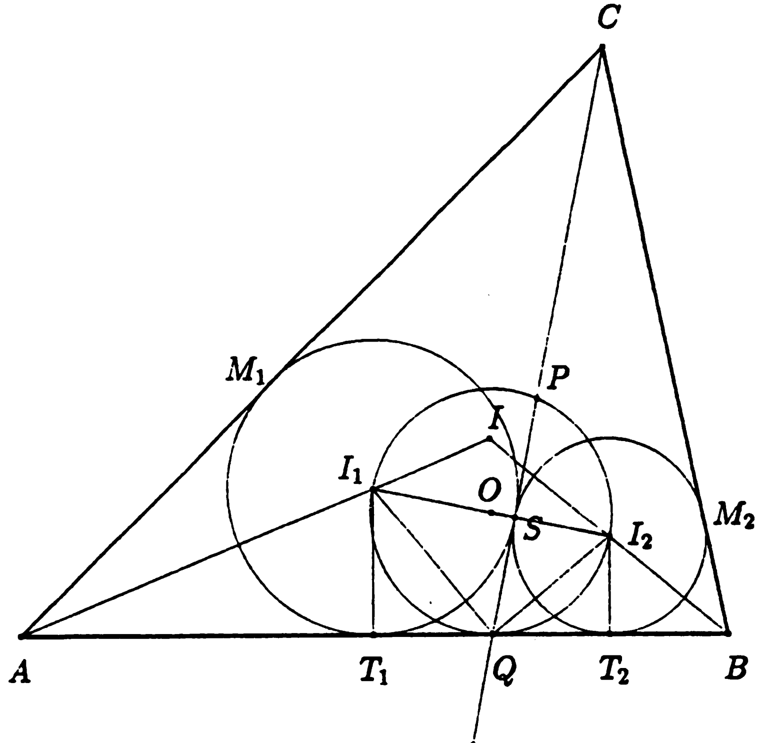
Siguin p_1, p_2 i p_3 els semiperímetres dels triangles ABC, AQC i BQC respectivament. Es comprova fàcilment que $p_1 + p_2 = p + d$, on d és la distància de C a Q. Es compleix que

$$QT_1 = QS_1 = p_1 - b \qquad \text{i} \qquad QT_2 = QS_2 = p_2 - a.$$

Com que O és el punt mitjà d'I_1I_2, per projecció paral·lela, O' és el punt mitjà d'S_1S_2 i $QS_1 = QO' - O'S_1 = PO' - O'S_2 = PS_2$ i, per tant, $QP = QS_2 + S_2P = QS_2 + QS_1 = QT_2 + QT_1 = T_1T_2$. Però $T_1T_2 = p_1 - b + p_2 - a = p_1 + p_2 - (b+a) = p + d - (2p - c) = d - (p-c)$, d'on $PC = p - c$. La distància de P a C és independent de la posició de la recta QC i descriu un arc de circumferència de centre C que passa pels punts de tangència en els costats a i b de la circumferència inscrita al triangle ABC.

23. Donat un triangle ABC, trobeu un punt Q del costat AB tal que les circumferències als triangles AQC i BQC siguin tangents.

Solució

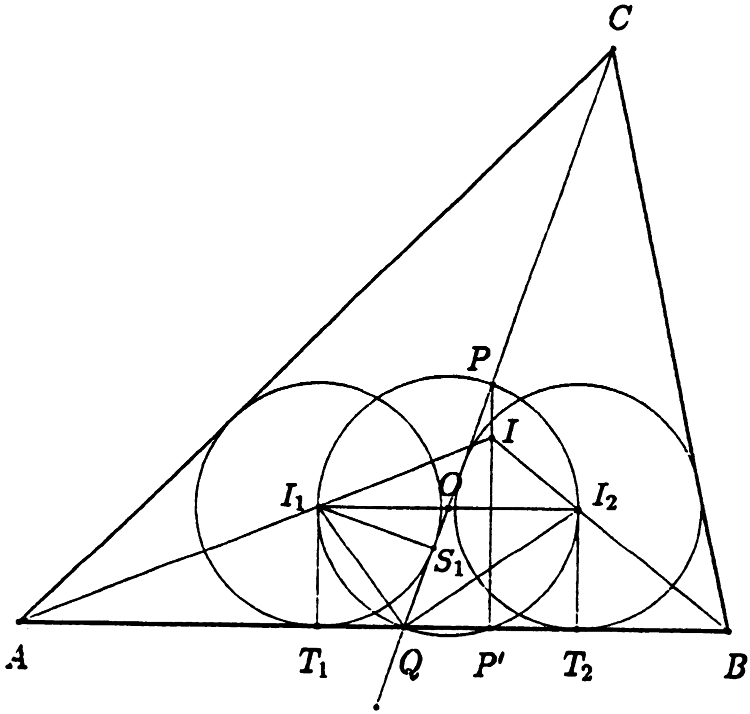


Posem $z = QT_1 = QS = QT_2; y = AT_1 = AM_1; t = BT_2 = BM_2; x = CM_1 = CS = CM_2$. Si p és el semiperímetre del triangle ABC és té que $2p = 2y + 2z + 2t + 2x$ i es dedueix que $p = y + z + t + x = y + z + a$.

Resulta que $AQ = y + z = p - a$, d'on es dedueix que Q és el peu de la perpendicular traçada des d'I a AB.

24. Donat un triangle ABC, trobeu un punt Q del costat AB tal que les circumferències inscrites als triangles AQC i BQC tinguin el mateix radi.

Solució



Sigui r el radi de les circumferències inscrites als triangles AQC i BQC, r' el de la circumferència de diàmetre I_1I_2, centres respectius de les circumferències anteriors, p, p_1 i p_2 els semiperímetres d'ABC i BQC, d la distància de Q a C.

De la semblança dels triangles I_1T_1Q i I_2T_2Q en resulta $\dfrac{r}{T_1Q} = \dfrac{QT_2}{r}$ i $r^2 = T_1Q{\cdot}QT_2 = (p_1 - b)(p_2 - a)$. De la semblança dels triangles I_1S_1O i QPP' en surt $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{PP'}{2r'}$ i $PP' = 2r$. Aplicant el teorema de Pitàgoras al triangle $QP'P$ surt

$$(QP')^2 = (2r')^2 - (2r)^2 = \left((p_1 - b) + (p_2 - a)\right)^2 - 4(p_1 - b)(p_2 - a) =$$
$$= \left((p_1 - b)^2 + 2(p_1 - b)(p_2 - a) + (p_2 - a)^2\right) - 4(p_1 - b)(p_2 - a) = \left((p_1 - b) - (p_2 - a)\right)^2.$$

Com que $p_2 - a > p_1 - b$ resulta que $QP' = |p_1 - p_2 - b + a| = p_2 - a - p_1 + b$, i resulkta que $AP' = AQ + QP' = (2p_1 - b - d) + (p_2 - a - p_1 + b) = p_1 + p_2 - d - a = p - a$; per tant P' és el peu de la perpendicular traçada des d'I a AB.

Per tal d'obtenir Q es traça l'arc de centre C que passa pels peus de les perpendiculars traçades des d'I als costats a i b. Seguidament es traça la recta perpendicualr a c que passa per I; aquesta recta i el cercle anterior es tallen a P. La recta CP és la recta buscada.